

## Existence d'un manipulateur 6R sphérique pour lequel la demi-sphère ouverte est une surface isotrope continue

Khaled Akrou<sup>1</sup>, Luc Baron<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Département de Génie mécanique, École polytechnique de montréal, khaled.akrou@polymtl.ca*

<sup>2</sup> *Département de Génie mécanique, École polytechnique de montréal, luc.baron@polymtl.ca*

---

### Existence of a Spherical 6R Serial Manipulator Having Isotropic Posture for Any Point of the Open Half Sphere

**Abstract :** Since the kinematic properties of serial (and also spherical) manipulators are greatly enhanced at isotropic posture (IP), we try to determine if any point of the sphere could be an IP. Unfortunately, isolated IPs are not as useful as curved IPs or surface IPs. For these continuum, the manipulator can follow the curve or the surface while keeping itself to an IP. A posture of a manipulator is said isotropic if the product of the jacobian matrix times its transpose is a scalar times the identity matrix. In this paper, we show that any point of the sphere is an IP, while the two open half spheres are two complementary IP continuum. The kinematic parameters of such an isotropic manipulator are presented.

**Keywords:** isotropy, isotropic manipulator, isotropic curve, isotropic surface

---

**Résumé :** Puisque que plusieurs avantages sont liés à la propriété d'isotropie, notamment l'amélioration des propriétés cinématiques d'un manipulateur, nous cherchons à savoir si un point quelconque de la sphère peut être une posture isotrope pour un manipulateur sériel sphérique. Les postures isotropes isolées ne permettent pas de tirer pleinement avantage de l'isotropie autant que les parcours isotropes continus ou les surfaces isotropes continues qui permettent au manipulateur de déplacer ses articulations le long de ces courbes ou surfaces continues tout en conservant des postures isotropes. Une posture d'un manipulateur sphérique est dite isotrope si le produit de la matrice jacobienne  $J$  par sa transposée est un multiple de la matrice identité. Dans cet article nous montrons que tout point de la sphère appartient à un ensemble isotrope de postures d'un manipulateur 6R sphérique et que la demi-sphère ouverte est une surface isotrope continue pour un même manipulateur 6R sphérique que nous définirons. Nous présentons les courbes de positions de chacune des articulations de ce manipulateur auquel nous faisons décrire à ses six articulations un parcours isotrope continu sur la sphère. La dernière articulation de ce manipulateur se déplace uniquement sur la demi-sphère ouverte qu'elle peut parcourir entièrement en tant que surface isotrope continue.

**Mots clés:** isotropie, manipulateur isotrope, courbe isotrope, surface isotrope

## 1 INTRODUCTION

Les articulations d'un manipulateur sphérique constamment en état d'isotropie, doivent soit garder une position fixe, soit se déplacer de manière continue sur la sphère. Le déplacement isotrope est alors soit une courbe isotrope continue, soit une surface isotrope continue. Il existe de tels ensembles de courbes et de surfaces pour lesquels il y a un manipulateur sphérique isotrope qui les parcourt. Les positions des différentes articulations définissent sur ces courbes ou ces surfaces un ensemble isotrope de points.

Dans cet article, nous démontrons qu'il existe un manipulateur 6R sphérique dont la dernière articulation peut atteindre, par un déplacement continu, tout point de la demi-sphère ouverte, et qui conserve lors de tout déplacement une posture isotrope. Les paramètres de Denavit-Hartenberg de ce manipulateur ne dépendent pas de la position de ses articulations sur la sphère.

À notre connaissance, il n'y a pas eu d'étude concernant l'isotropie des manipulateurs sphériques ayant une surface isotrope continue. Les autres travaux sur l'isotropie des manipulateurs sphériques se sont limités aux positions isotropes fixes ou à des parcours triviaux [1,2,3].

Une courbe isotrope continue d'un manipulateur sphérique est une courbe continue sur la sphère parcourue par un point de la dernière articulation du manipulateur qui conserve tout au long du déplacement une posture isotrope. Une surface isotrope continue est une surface connexe pouvant être décrite par un point de la dernière articulation du manipulateur qui conserve tout au long du déplacement une posture isotrope.

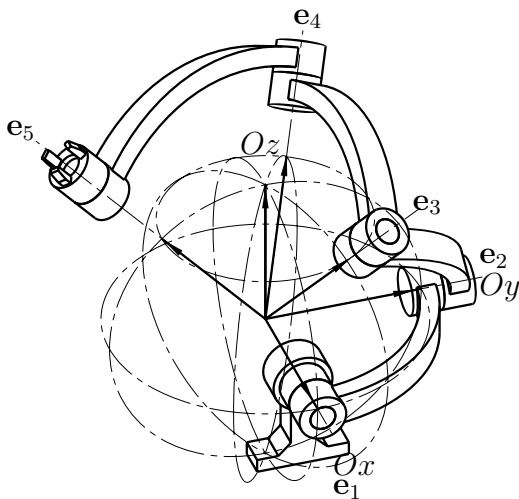


Figure 1 : Manipulateur sphérique 5R

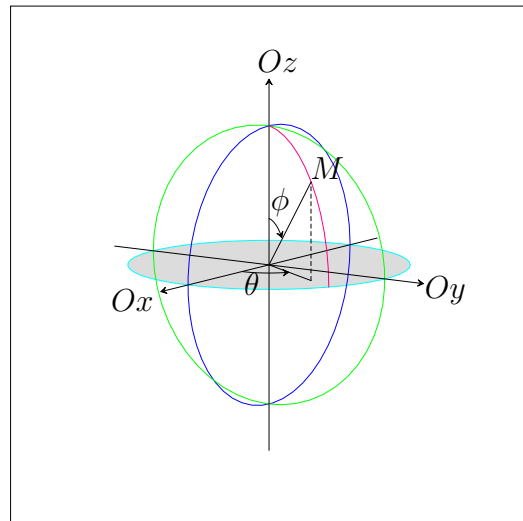


Figure 2 : Coordonnées sphériques d'un point  $M$

Notation :

$$\{n\} = \{1, 2, \dots, n\}$$

$E_n = \{P_i\}_{i=1}^n$  ensemble de  $n$  points  $P_i$ .

$F_n = \{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n = \{\overrightarrow{OP_i}\}_{i=1}^n$  ensemble de  $n$  vecteurs positions des points  $\{P_i\}_{i=1}^n$  et où  $O$  est le centre de la sphère de rayon unitaire.

$\|\mathbf{e}_i\|$  norme euclidienne du vecteur  $\mathbf{e}_i = \overrightarrow{OP_i}$ .

L'antipode du point  $P_i$  est le point  $P'_i$  tel que  $\overrightarrow{OP'_i} = -\overrightarrow{OP_i}$ .

Dans tout ce qui suit, on considère la sphère unitaire centrée en  $O$ , l'origine du repère  $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ .

La sphère unitaire sera notée  $\mathbf{S}$ .

Le cercle  $C$  est le cercle de la sphère  $\mathbf{S}$  d'équations  $(x^2 + y^2 = 1 \quad \wedge \quad z = 0)$ .

La demi-sphère ouverte est la demi-sphère sans le cercle  $C$ .

La demi-sphère supérieure de  $\mathbf{S}$  sera notée  $\mathbf{S}_1$ .

La demi-sphère inférieure de  $\mathbf{S}$  sera notée  $\mathbf{S}_2$ .

La demi-sphère supérieure ouverte de  $\mathbf{S}$  sera notée  $\widehat{\mathbf{S}}_1$ .

La demi-sphère inférieure ouverte de  $\mathbf{S}$  sera notée  $\widehat{\mathbf{S}}_2$ .

Définitions:

Soit  $E_n$ , un ensemble de  $n$  points situés sur la sphère unitaire centrée à l'origine et ayant  $F_n$  pour ensemble de vecteurs position. On a alors  $\|\mathbf{e}_i\|=1 \quad \forall i \in \{n\}$

Posons  $\mathbf{J} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$  la matrice dont les  $n$  colonnes sont formées par les  $n$  vecteurs  $\mathbf{e}_i$ ,  $i \in \{n\}$ . L'ensemble  $E_n$  est dit isotrope si  $\mathbf{J}\mathbf{J}^T = \lambda\mathbf{I}$  où  $\lambda \in \mathbf{R}$  et  $\mathbf{I}$  matrice identité de  $\mathbf{R}^3$ .

Le produit scalaire de deux vecteurs  $\mathbf{u}=(a, b, c)^T$  et  $\mathbf{v}=(x, y, z)^T$  est noté  $\mathbf{u}\mathbf{v}=ax + by + cz$ , on a aussi  $\mathbf{u}\mathbf{v}=\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ .

### 1.1 Exemples d'ensembles isotropes de points de la sphère unitaire

Pour  $n$  points sur la sphère unitaire dont les vecteurs associés forment un ensemble isotrope, nous trouvons dans [1] des exemples d'ensembles isotropes pour  $n = 3$ ,  $n = 4$  et  $n = 5$ .

Nous donnons pour  $n$  pair et  $2 < n < 40$  une construction permettant d'obtenir des ensembles isotropes de  $n$  vecteurs. Par exemple pour  $n = 4$ , nous avons les 8 quadruplets de vecteurs, ci-dessous, écrits sous forme de matrice dont les colonnes sont formés par les vecteurs en question. Aucun vecteur ne se retrouve dans deux matrices différentes parmi les huit matrices ci-dessous.

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{3}} & \sqrt{\frac{1}{3}} & \sqrt{\frac{1}{3}} & \sqrt{\frac{1}{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \sqrt{\frac{1}{3}} & \sqrt{\frac{1}{3}} & \sqrt{\frac{1}{3}} & \sqrt{\frac{1}{3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \sqrt{\frac{1}{3}} & \sqrt{\frac{1}{3}} & \sqrt{\frac{1}{3}} & \sqrt{\frac{1}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{1}{3}} & -\sqrt{\frac{1}{3}} & -\sqrt{\frac{1}{3}} & -\sqrt{\frac{1}{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ -\sqrt{\frac{1}{3}} & -\sqrt{\frac{1}{3}} & -\sqrt{\frac{1}{3}} & -\sqrt{\frac{1}{3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ -\sqrt{\frac{1}{3}} & -\sqrt{\frac{1}{3}} & -\sqrt{\frac{1}{3}} & -\sqrt{\frac{1}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{3}} & \sqrt{\frac{1}{3}} & \sqrt{\frac{1}{3}} & \sqrt{\frac{1}{3}} \\ \sqrt{\frac{1}{3}} & -\sqrt{\frac{1}{3}} & \sqrt{\frac{1}{3}} & -\sqrt{\frac{1}{3}} \\ \sqrt{\frac{1}{3}} & \sqrt{\frac{1}{3}} & -\sqrt{\frac{1}{3}} & -\sqrt{\frac{1}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{1}{3}} & -\sqrt{\frac{1}{3}} & -\sqrt{\frac{1}{3}} & -\sqrt{\frac{1}{3}} \\ \sqrt{\frac{1}{3}} & -\sqrt{\frac{1}{3}} & -\sqrt{\frac{1}{3}} & \sqrt{\frac{1}{3}} \\ \sqrt{\frac{1}{3}} & -\sqrt{\frac{1}{3}} & \sqrt{\frac{1}{3}} & -\sqrt{\frac{1}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{1}{3}} & -\sqrt{\frac{1}{3}} & -\sqrt{\frac{1}{3}} & -\sqrt{\frac{1}{3}} \\ \sqrt{\frac{1}{3}} & -\sqrt{\frac{1}{3}} & -\sqrt{\frac{1}{3}} & \sqrt{\frac{1}{3}} \\ \sqrt{\frac{1}{3}} & -\sqrt{\frac{1}{3}} & \sqrt{\frac{1}{3}} & -\sqrt{\frac{1}{3}} \end{pmatrix}$$

Pour  $n = 4p + 2$  avec  $p \in \{9\}$

$$\text{On prend d'abord } \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

puis on rajoute une seule fois progressivement l'un des huit quadruplets ci-dessus.

Pour  $n = 4p$  avec  $p \in \{9\}$

$$\text{On prend d'abord } \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$$

puis on rajoute une seule fois progressivement l'un des huit quadruplets déjà mentionnés ci-dessus.

Il a été démontré dans [2] que :

Propriété 1 : L'isotropie d'un ensemble de points  $E_n$  est conservée par toute isométrie.

Propriété 2 : Soit  $\mathbf{J} = (\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \dots \ \mathbf{e}_n)$ . Si  $\mathbf{J}\mathbf{J}^T = \lambda\mathbf{I}$  alors  $\lambda = \frac{n}{3}$ .

Dans ce qui suit, nous montrerons que la demi-sphère ouverte est une surface isotrope continue pour un manipulateur que nous définirons.

## 2 MANIPULATEUR SÉRIEL 6R SPHÉRIQUE ISOTROPE

La matrice jacobienne, dénotée  $\mathbf{J}$ , d'un manipulateur sériel sphérique ayant  $n$  articulations est définie par  $\mathbf{J} = (\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \dots \ \mathbf{e}_n)$  où  $\mathbf{e}_i$  est le vecteur unitaire indiquant la direction de l'axe de la  $i^{\text{ème}}$  articulation. La relation cinématique entre la vitesse angulaire  $\boldsymbol{\omega}$  de l'effecteur et le vecteur  $\dot{\boldsymbol{\theta}} = (\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dots, \dot{\theta}_n)^T$  est  $\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\omega}$

### Formulation restreinte du problème

Les vecteurs représentés par les colonnes de la matrice jacobienne d'un manipulateur 6R sphérique ont leurs points associés qui appartiennent à la sphère unitaire : les vecteurs  $\mathbf{e}_i$  sont donc normés. Dans l'espace  $\mathbf{R}^3$  ayant  $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  pour repère, pour tout point M de la sphère unitaire, il existe  $\theta \in [0, 2\pi]$  et  $\phi \in [0, \pi]$  tel que les coordonnées de M soient :  $\mathbf{OM} = (\sin(\phi)\cos(\theta), \sin(\phi)\sin(\theta), \cos(\phi))^T$ . Ce sont les coordonnées sphériques de M (Figure 2).

La fonction  $f$  de  $[0, 2\pi] \times [0, \pi]$  dans  $\mathbf{S}$  :

$$(\theta, \phi) \longrightarrow f(\theta, \phi) = (\sin(\phi)\cos(\theta), \sin(\phi)\sin(\theta), \cos(\phi))^T \text{ est une surjection.}$$

Un manipulateur sphérique centré en O a tous les axes de rotation de ses articulations qui se coupent en O. Sur la sphère de rayon unitaire ( $R = 1$ ) la membrure qui relie deux articulations successives est donc circulaire et de longueur  $L = R\alpha = \alpha$  où  $\alpha$  est l'angle entre les axes de rotation de ces deux articulations en question :  $\alpha_i = \widehat{(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{i+1})}$  comme nous le verrons

dans la section III. Il s'en suit qu'un manipulateur sphérique est géométriquement entièrement et précisément déterminé par la connaissance des angles  $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n-1}$ . Si l'un des angles  $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n-1}$  varie alors la géométrie du manipulateur sphérique varie aussi.

Par conséquent, si lors d'un déplacement quelconque nous voulons utiliser un seul manipulateur, les angles  $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n-1}$  entre les axes de rotation de ses articulations successives doivent rester constants, ce qui revient à dire que le produit scalaire entre les vecteurs unitaires  $\mathbf{e}_i$  et  $\mathbf{e}_{i+1}$  des axes de rotation de deux articulations consécutives doit rester constant pendant tout le déplacement.

Il est aisé de constater que le produit scalaire entre le vecteur  $\mathbf{OM} = (\sin(\phi)\cos(\theta), \sin(\phi)\sin(\theta), \cos(\phi))^T$  et le vecteur  $\mathbf{v} = (\cos(\phi)\cos(\theta), \cos(\phi)\sin(\theta), -\sin(\phi))^T$  est nul. Si  $\mathbf{OM}$  et  $\mathbf{v}$  sont les directions des axes de rotations de deux articulations successives, alors la membrure qui les relie restera constante quelles que soient les valeurs des angles  $\theta$  et  $\phi$ . De même on constate que le produit scalaire entre le vecteur  $\mathbf{v}$  et le vecteur  $\mathbf{w} = (-\sin(\theta), \cos(\theta), 0)^T$  est nul quelles que soient les valeurs des angles  $\theta$  et  $\phi$ .

Prenons  $\mathbf{OM} = \mathbf{e}_6$  de manière à ce que la sixième articulation puisse théoriquement se positionner sur tout point de  $\mathbf{S}$ , et choisissons  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5$  de telle manière que tous les produits scalaires  $\mathbf{e}_i^T \mathbf{e}_{i+1}$  soient constants  $\forall (\theta, \phi) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ . De proche en proche, nous déterminons six vecteurs dont le produit scalaire de deux vecteurs successifs d'entre eux est nul.

La matrice jacobienne ainsi obtenue est alors  $\mathbf{J} = (\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3 \ \mathbf{e}_4 \ \mathbf{e}_5 \ \mathbf{e}_6)$  avec

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -\sin(\phi)\sin(\theta) & -\cos(\phi)\sin(\theta) & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & \cos(\phi)\cos(\theta) & \sin(\phi)\cos(\theta) \\ \sin(\phi)\cos(\theta) & \cos(\phi)\cos(\theta) & \sin(\theta) & \cos(\theta) & \cos(\phi)\sin(\theta) & \sin(\phi)\sin(\theta) \\ -\cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 & 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \quad (1)$$

On vérifie aisément que  $\forall (\theta, \phi) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi], \forall i \in \{5\} \ \mathbf{e}_i^T \mathbf{e}_{i+1} = 0$ . Outre leurs produits scalaires successifs constants  $\forall (\theta, \phi) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ , les vecteurs  $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^6$  ont été choisis de telle manière que  $\mathbf{J}\mathbf{J}^T = \lambda\mathbf{I}$  avec  $\lambda = 2$ , c'est-à-dire pour que  $\mathbf{J}$  soit une matrice isotrope. Puisque  $n = 6$  on a donc d'après la propriété 2,  $\lambda = \frac{6}{3} = 2$ .

Le manipulateurs 6R sphérique isotrope associé à  $\mathbf{J}$  gardera donc une position isotrope sur tout parcours qu'il pourra effectuer sur  $\mathbf{S}$ , et il gardera une géométrie invariable lors de son déplacement sur la partie de la surface de la sphère  $\mathbf{S}$  qu'il pourra atteindre et qui sera éventuellement pour ce manipulateur une surface isotrope continue.

Pour nous placer dans une optique plus habituelle pour concevoir sans difficulté un tel manipulateur, nous cherchons à obtenir un manipulateur dont le premier vecteur de la matrice jacobienne qui lui est associée soit constant. Nous transformons la matrice jacobienne  $\mathbf{J} = (\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3 \ \mathbf{e}_4 \ \mathbf{e}_5 \ \mathbf{e}_6)$  en la matrice  $\mathbf{J}' = (\mathbf{e}'_1 \ \mathbf{e}'_2 \ \mathbf{e}'_3 \ \mathbf{e}'_4 \ \mathbf{e}'_5 \ \mathbf{e}'_6)$  où  $\mathbf{e}'_1$  est constant.

Sans perte de généralité et pour plus de commodité nous fixons  $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{k} = (0, 0, 1)^T$ . Soit le vecteur  $\mathbf{e} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{e}_1$ , la rotation autour du vecteur  $\mathbf{e}$  et d'angle  $\psi = \pi - \phi$  amène le vecteur  $\mathbf{e}_1$  sur  $\mathbf{k}$ .

La rotation d'un angle  $\psi = \pi - \phi$  autour de  $\mathbf{e}$  a pour matrice  $\mathbf{Q} = \mathbf{e}\mathbf{e}^T + \cos(\psi)(1 - \mathbf{e}\mathbf{e}^T) + \sin(\psi)\mathbf{E}$  où  $\mathbf{E}$  est la matrice produit vectoriel du vecteur  $\mathbf{e}$  [7]. On a alors

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) - \cos(\phi)\sin^2(\theta) & \sin(\theta)\cos(\theta)(1 + \cos(\phi)) & \sin(\phi)\sin(\theta) \\ \sin(\theta)\cos(\theta)(1 + \cos(\phi)) & \sin^2(\theta) - \cos(\phi)\cos^2(\theta) & -\sin(\phi)\cos(\theta) \\ -\sin(\phi)\sin(\theta) & \sin(\phi)\cos(\theta) & -\cos(\phi) \end{pmatrix} \quad (2)$$

d'où

$$\mathbf{J}' = \mathbf{Q}\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & \cos(\phi)\sin(\theta) & \cos(\phi)\cos(\theta) - \sin^2(\phi)\sin(\theta) & \sin(\phi)(\cos(\theta) + \cos(\phi)\sin(\theta)) \\ 0 & -\cos(\theta) & \sin(\theta) & -\cos(\phi)\cos(\theta) & \cos(\phi)\sin(\theta) + \sin^2(\phi)\cos(\theta) & \sin(\phi)(\sin(\theta) - \cos(\phi)\cos(\theta)) \\ 1 & 0 & 0 & \sin(\phi) & \sin(\phi)\cos(\phi) & -\cos^2(\phi) \end{pmatrix} \quad (3)$$

Nous avons bien  $\mathbf{J}'\mathbf{J}'^T = \lambda\mathbf{I}$  avec  $\lambda = 2$  puisque d'après la propriété 1, les isométries conservent l'isotropie. Les rotations conservent les angles donc le manipulateur associé à la matrice jacobienne  $\mathbf{J}'$  est simplement le manipulateur associé à la matrice jacobienne  $\mathbf{J}$  vu sous un autre angle.

### 3 PARAMÈTRES DE DENAVIT-HARTENBERG ET MANIPULATEURS ASSOCIÉS

Les paramètres de Denavit-Hartenberg associés aux manipulateurs isotropes sont obtenus comme suit : toutes les directions  $\{Z_i\}_{i=1}^6$  des vecteurs  $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^6$  se coupent au centre  $O$  de la sphère unitaire. Donc les axes  $\{X_i\}_{i=1}^6$  sont tels que  $\mathbf{X}_i = \mathbf{e}_{i-1} \wedge \mathbf{e}_i$ . Les angles  $\alpha_i = \widehat{(Z_i, Z_{i+1})}$  sont mesurés par rapport à l'orientation positive de  $X_{i+1}$ . Les angles  $\theta_i = \widehat{(X_i, X_{i+1})}$  sont mesurés par rapport à l'orientation positive de  $Z_i$ .

Nous obtenons les paramètres de Denavit-Hartenberg pour la matrice jacobienne  $\mathbf{J}'$  ci-dessus :

$\mathbf{X}_2$	$\mathbf{X}_3$	$\mathbf{X}_4$	$\mathbf{X}_5$	$\mathbf{X}_6$
$\cos(\theta)$	0	$\sin(\phi)\sin(\theta)$	$\cos(\phi)\cos(\theta) - \sin^2(\phi)\sin(\theta)$	$\cos(\phi)\sin(\theta)$
$\sin(\theta)$	0	$-\sin(\phi)\cos(\theta)$	$\cos(\phi)\sin(\theta) + \sin^2(\phi)\cos(\theta)$	$-\cos(\phi)\cos(\theta)$
0	1	$-\cos(\phi)$	$\sin(\phi)\cos(\phi)$	$\sin(\phi)$

Puisque  $\alpha_i = \widehat{(Z_i, Z_{i+1})}$ , on a

$$\cos(\alpha_i) = \frac{\mathbf{e}'_i \mathbf{e}'_{i+1}}{\|\mathbf{e}'_i\| \|\mathbf{e}'_{i+1}\|} = \mathbf{e}'_i \mathbf{e}'_{i+1} \quad (4)$$

Ainsi les angles entre les axes  $\{Z_i\}_{i=1}^6$  des articulations successives, mesurés par rapport à l'orientation positive de  $X_{i+1}$ , sont entièrement déterminés par la connaissance des vecteurs colonnes de la matrice jacobienne. Les coordonnées des vecteurs  $\{\mathbf{X}_i\}_{i=2}^6$ , du tableau ci-dessus, nous donnent  $\|\mathbf{X}_2\| = \|\mathbf{X}_3\| = \|\mathbf{X}_4\| = \|\mathbf{X}_5\| = \|\mathbf{X}_6\| = 1$ . Tous les produits scalaires sont nuls :  $\mathbf{e}'_i{}^T \mathbf{e}'_{i+1} = 0 \forall i \in \{5\}$ . Donc, on a  $\alpha_i = \frac{\pi}{2}$  ou  $\alpha_i = -\frac{\pi}{2} \forall i \in \{5\}$ . Les valeurs du tableau précédent nous

permettent aussi d'avoir les valeurs des angles  $\{\cos(\theta_i)\}_{i=2}^5$ . Les valeurs de  $\theta_1$  et  $\theta_6$  n'influent pas sur l'isotropie du manipulateur.

$i$	1	2	3	4	5	6
$\alpha_i$	$90^\circ$	$-90^\circ$	$90^\circ$	$-90^\circ$	$90^\circ$	*
$\cos(\theta_i)$	$\cos(\theta_1)$	0	$-\cos(\phi)$	$-\sin(\phi)$	0	$\cos(\theta_6)$

Les valeurs de  $\{a_i\}_{i=1}^5$  et  $\{b_i\}_{i=1}^5$  sont toutes nulles, puisque tous les axes  $\{Z_i\}_{i=1}^6$  se coupent en  $O$ , donc  $a_i = \text{distance}(Z_i, Z_{i+1}) = 0 \ \forall i \in \{5\}$ . On a aussi  $\mathbf{X}_i = \mathbf{e}'_{i-1} \wedge \mathbf{e}'_i$ , les axes  $X_i$  se coupent aussi tous en  $O$ . Or,  $|b_i| = \text{distance}(X_i, X_{i+1})$  donc  $b_i = 0 \ \forall i \in \{5\}$ .

On constate que les valeurs de tous les angles  $\{\alpha_i\}_{i=1}^5$  sont constants, le manipulateur 6R sphérique qui en découle peut décrire toute la demi-sphère  $\mathbf{S}_2$  comme surface isotrope tant qu'il ne se produira pas de collision entre ses articulations, puisque la cote de sa dernière articulation est  $z = -\cos(\phi)^2$ . Sa matrice jacobienne reste donc isotrope en chacun des points de cette demi-sphère quelque soit le parcours choisi sur celle-ci :  $\mathbf{S}_2$  sera alors une surface isotrope continue pour le manipulateur associé à  $\mathbf{J}'$ .

#### 4 EXEMPLE DE TRAJECTOIRE ISOTROPE DU MANIPULATEUR SPHÉRIQUE ASSOCIÉ À $\mathbf{J}'$

La courbe  $\mathfrak{S}$  est défini par  $\mathfrak{S} = \{M \in \mathbf{S}, \mathbf{OM} = (\sin(\phi)(\cos(2\phi) + \cos(\phi)\sin(2\phi)), \sin(\phi)(\sin(2\phi) - \cos(\phi)\cos(2\phi)), -\cos^2(\phi))^T \wedge \phi \in [0, 2\pi]\}$ . La courbe  $\mathfrak{S}$  que parcourt la dernière articulation du manipulateur sphérique est représentée sur la Figure 3.

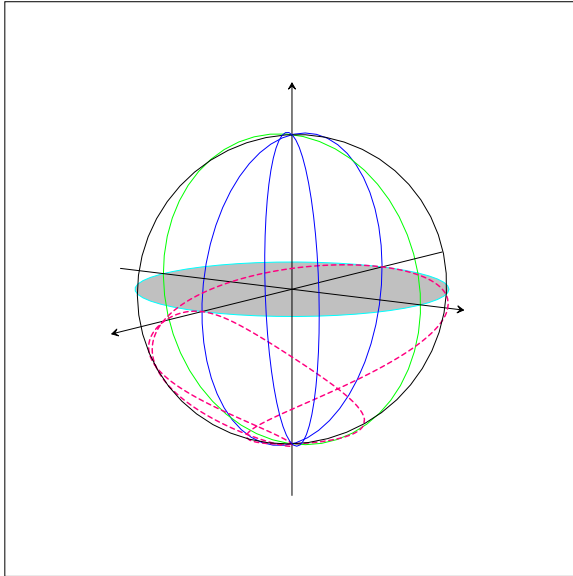


Figure 3

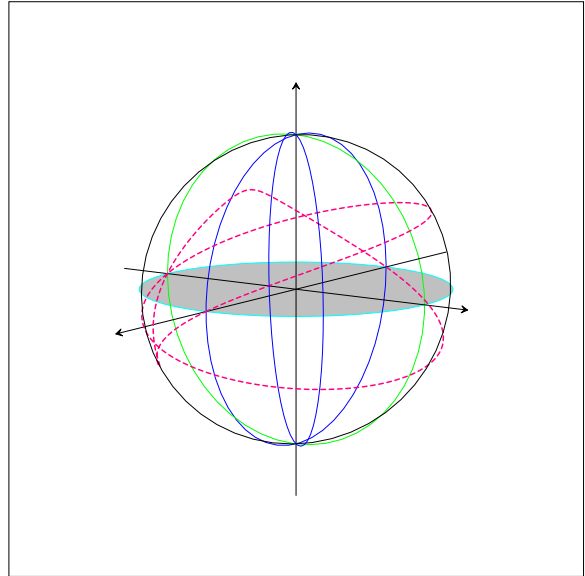


Figure 4

Les figures 7, 6, 5 et 4 montrent respectivement les courbes trajectoires, en pointillé rouge, des deuxième, troisième, quatrième et cinquième articulations sur la sphère unitaire pour le manipulateur sphérique issu de la matrice jacobienne  $\mathbf{J}'$ . La première articulation reste fixe puisque  $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{k}$  est constant.

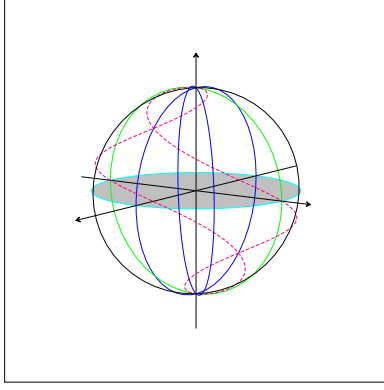


Figure 5

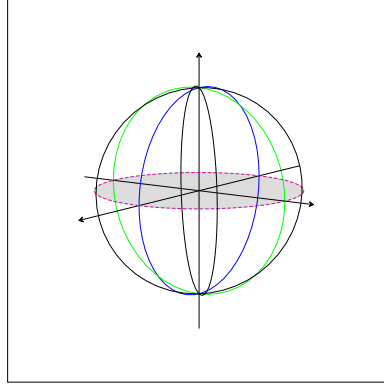


Figure 6

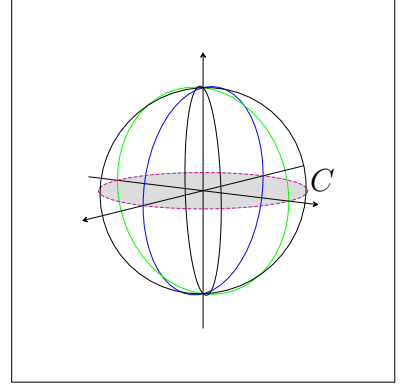


Figure 7

## 5 ESPACE DE TRAVAIL ET COLLISIONS INTERNES

Les coordonnées du vecteur  $\mathbf{e}_6$  qui porte l'axe de la dernière articulation sont  $\mathbf{e}_6 = (\sin(\phi)(\cos(\theta) + \cos(\phi)\sin(\theta)), \sin(\phi)(\sin(\theta) - \cos(\phi)\cos(\theta)), -\cos^2(\phi))^T$ . Puisque la cote  $z$  de  $\mathbf{e}_6$  est égale à  $-\cos^2(\phi)$ , la dernière articulation du manipulateur sphérique associé à  $\mathbf{J}'$  parcourt tout au plus la demi-sphère  $\mathbf{S}_2$ .

Soit  $M(x, y, z)$  un point quelconque de  $\mathbf{S}_2$ . Pour savoir si la dernière articulation du manipulateur associé à  $\mathbf{J}'$  peut atteindre tout point de  $\mathbf{S}_2$ , il suffit de montrer qu'il existe  $(\theta, \phi) \in [0, 2\pi] \times [\frac{\pi}{2}, \pi]$  tel que

$$\begin{aligned} \sin(\phi)(\cos(\theta) + \cos(\phi)\sin(\theta)) &= x \\ \sin(\phi)(\sin(\theta) - \cos(\phi)\cos(\theta)) &= y \\ -\cos^2(\phi) &= z \end{aligned} \quad (5)$$

$M \in \mathbf{S}_2 \implies z \in [-1, 0] \implies \cos^2(\phi) = -z$  admet pour solutions  $\phi_1 = \arccos(\sqrt{-z})$  ou  $\phi_0 = \arccos(-\sqrt{-z})$ , ce qui donne  $\phi_1 = \pi - \phi_0$ . Puisque  $M$  se situe sur la demi-sphère inférieure  $\mathbf{S}_2$  donc l'unique solution est  $\phi_0 = \arccos(-\sqrt{-z})$ .

La résolution du système suivant

$$\begin{aligned} \cos(\theta) + \cos(\phi)\sin(\theta) &= \frac{x}{\sin(\phi_0)} \\ \sin(\theta) - \cos(\phi)\cos(\theta) &= \frac{y}{\sin(\phi_0)} \end{aligned} \quad (6)$$

donne pour  $\phi_0 \neq \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} \sin(\theta) &= \frac{y + x\cos(\phi_0)}{\sin(\phi_0)(1 + \cos^2(\phi_0))} \\ \cos(\theta) &= \frac{x - y\cos(\phi_0)}{\sin(\phi_0)(1 + \cos^2(\phi_0))} \end{aligned} \quad (7)$$



$$\left\langle \frac{y+x\sin(\phi_0)}{\sin(\phi_0)(1+\cos^2(\phi_0))} \right\rangle^2 + \left\langle \frac{x-y\cos(\phi_0)}{\sin(\phi_0)(1+\cos^2(\phi_0))} \right\rangle^2 = \frac{(x^2+y^2)}{\sin^2(\phi_0)(1+\cos^2(\phi_0))}$$

Or  $\sin^2(\phi_0)(1 + \cos^2(\phi_0)) + \cos^4(\phi_0) = 1$  donc

$$\sin^2(\phi_0)(1 + \cos^2(\phi_0)) = 1 - \cos^4(\phi_0) = 1 - z^2 \quad (8)$$

puisque  $z = -\cos^2(\phi_0)$ .

D'où  $\frac{(x^2+y^2)}{\sin^2(\phi_0)(1+\cos^2(\phi_0))} = \frac{x^2+y^2}{1-z^2} = 1$  car  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  puisque  $M \in \mathbf{S}_2$ .

Si  $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$  alors on a  $M = (\cos(\theta_0), \sin(\theta_0), 0)$  et le couple  $(\theta_0, \frac{\pi}{2})$  est solution de (5).

Par conséquent  $\exists \theta_0 \in [0, 2\pi]$  tel que (6) soit vérifié, donc  $\exists(\theta_0, \phi_0) \in [0, 2\pi] \times [\frac{\pi}{2}, \pi]$  tel que (5) soit vérifié, par conséquent la dernière articulation du manipulateur associé à  $\mathbf{J}'$  peut atteindre tout point de  $\mathbf{S}_2$  à condition qu'il n'y ait pas de collision entre les articulations lors des déplacements.

Les fonctions  $\sin()$  et  $\cos()$  étant des fonctions continues, il s'en suit que la fonction

$$g : (\theta, \phi) \in [0, 2\pi] \times [\frac{\pi}{2}, \pi] \longrightarrow \begin{cases} x(\theta, \phi) = \sin(\phi)(\cos(\theta) + \cos(\phi)\sin(\theta)) \\ y(\theta, \phi) = \sin(\phi)(\sin(\theta) - \cos(\phi)\cos(\theta)) \\ z(\theta, \phi) = -\cos^2(\phi) \end{cases} \quad (9)$$

est continue sur  $\mathbf{S}_2$ , donc, tant qu'il n'y a pas de collision entre les articulations, la dernière articulation du manipulateur associé à la matrice jacobienne  $\mathbf{J}'$  peut suivre toute courbe continue sur  $\mathbf{S}_2$ , et les autres articulations peuvent décrire des courbes continues sur  $\mathbf{S}_2$  étant donné que les fonctions, qui sont les coordonnées de leur vecteur position  $\mathbf{e}_i$ , sont continues.

En considérant  $(\theta, \phi) \in [0, 2\pi] \times [\frac{\pi}{2}, \pi]$ , pour le manipulateur 6R sphérique associé à  $\mathbf{J}'$ , on a

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}'_2 - \mathbf{e}'_1\| &= \|\overrightarrow{P'_2 P'_1}\| = \sqrt{2}, & \|\mathbf{e}'_3 - \mathbf{e}'_1\| &= \|\overrightarrow{P'_3 P'_1}\| = \sqrt{2} \\ \|\mathbf{e}'_4 - \mathbf{e}'_1\| &= \|\overrightarrow{P'_4 P'_1}\| = \sqrt{2}\sqrt{1 - \sin(\phi)}, & \|\mathbf{e}'_5 - \mathbf{e}'_1\| &= \|\overrightarrow{P'_5 P'_1}\| = \sqrt{2 - \sin(2\phi)} \geq 1 \\ \|\mathbf{e}'_6 - \mathbf{e}'_1\| &= \|\overrightarrow{P'_6 P'_1}\| = \sqrt{2}\sqrt{1 + \cos^2(\phi)}, & \|\mathbf{e}'_3 - \mathbf{e}'_2\| &= \|\overrightarrow{P'_3 P'_2}\| = \sqrt{2} \\ \|\mathbf{e}'_4 - \mathbf{e}'_2\| &= \|\overrightarrow{P'_4 P'_2}\| = |1 - \cos(\phi)| \geq 1 \text{ car } \phi \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \\ \|\mathbf{e}'_5 - \mathbf{e}'_2\| &= \|\overrightarrow{P'_5 P'_2}\| = \sqrt{2}\sqrt{1 + \sin^2(\phi)}, & \|\mathbf{e}'_6 - \mathbf{e}'_2\| &= \|\overrightarrow{P'_6 P'_2}\| = \sqrt{2 - \sin(2\phi)} \\ \|\mathbf{e}'_4 - \mathbf{e}'_3\| &= \|\overrightarrow{P'_4 P'_3}\| = \sqrt{2}, & \|\mathbf{e}'_5 - \mathbf{e}'_3\| &= \|\overrightarrow{P'_5 P'_3}\| = \sqrt{2}\sqrt{1 - \cos(\phi)} \geq \sqrt{2} \\ \|\mathbf{e}'_6 - \mathbf{e}'_3\| &= \|\overrightarrow{P'_6 P'_3}\| = \sqrt{2}\sqrt{1 - \sin(\phi)}, & \|\mathbf{e}'_5 - \mathbf{e}'_4\| &= \|\overrightarrow{P'_5 P'_4}\| = \sqrt{2} \\ \|\mathbf{e}'_6 - \mathbf{e}'_4\| &= \|\overrightarrow{P'_6 P'_4}\| = \sqrt{2}, & \|\mathbf{e}'_6 - \mathbf{e}'_5\| &= \|\overrightarrow{P'_6 P'_5}\| = \sqrt{2} \end{aligned}$$

Donc les seules collisions possibles sont celles des articulations 1 et 4 entre elles et des articulations 3 et 6 entre elles en  $\phi = \frac{\pi}{2}$ . Par conséquent si  $\phi \in ]\frac{\pi}{2}, \pi]$  alors  $\forall i \neq j \in \{6\} \quad \|\mathbf{e}'_i - \mathbf{e}'_j\| > 0$ . Or, lorsque  $\phi$  parcourt  $] \frac{\pi}{2}, \pi]$  et  $\theta$  parcourt  $[0, 2\pi]$ , la dernière articulation du manipulateur 6R

sphérique associé à  $\mathbf{J}'$  parcourt théoriquement toute la demi-sphère inférieure ouverte  $\widehat{\mathbf{S}}_2$ . Sur le plan pratique, comme les articulations ont une certaine dimension,  $\phi$  devra décrire un intervalle  $[\frac{\pi}{2} - \psi, \pi]$  où  $\psi > 0$  est fonction du rayon de la sphère retenue.

Soit  $\mathbf{J}'' = (\mathbf{e}''_1 \mathbf{e}''_2 \mathbf{e}''_3 \mathbf{e}''_4 \mathbf{e}''_5 \mathbf{e}''_6)$  telle que  $\mathbf{e}''_1 = \mathbf{e}'_1$ ,  $\mathbf{e}''_2 = \mathbf{e}'_2$ ,  $\mathbf{e}''_3 = \mathbf{e}'_3$ ,  $\mathbf{e}''_4 = \mathbf{e}'_4$ ,  $\mathbf{e}''_5 = \mathbf{e}'_5$  et  $\mathbf{e}''_6 = -\mathbf{e}'_6$ . Soit  $P''_i$  le point associé au vecteur  $\mathbf{e}''_i$ ,  $P''_6$  est ainsi l'antipode de  $P'_6$ . Donc le manipulateur 6R sphérique associé à  $\mathbf{J}''$  décrit la demi-sphère ouverte  $\widehat{\mathbf{S}}_1$ .

Les dernières articulations des manipulateurs associés à  $\mathbf{J}'$  et  $\mathbf{J}''$  peuvent décrire toute la sphère hormis le cercle  $C$  qui est le cercle situé dans le plan horizontal, en pointillé sur la figure 7, mais seules les demi-sphères ouvertes  $\widehat{\mathbf{S}}_1$  et  $\widehat{\mathbf{S}}_2$  peuvent être parcourues de manière continue.

Ainsi, l'espace de travail total est la sphère  $\mathbf{S}$  privée du cercle  $C$ . Mais l'espace de travail continu est constitué séparément des 2 demi-sphères ouvertes  $\widehat{\mathbf{S}}_1$  et  $\widehat{\mathbf{S}}_2$ .

## 6 CONCLUSIONS

Il existe un manipulateur 6R sphérique pour lequel non seulement toute la demi-sphère ouverte est une surface isotrope continue, c'est-à-dire que le manipulateur reste constamment en état d'isotropie sur l'ensemble des points des parcours des six articulations mais la sixième articulation peut, quant à elle, parcourir toute la demi-sphère ouverte en suivant n'importe quelle courbe, continue ou pas, tracée sur cette demi-sphère sans qu'aucune collision ne se produise entre deux articulations quelconques du manipulateur.

## 7 RÉFÉRENCES

- [1] K. Akrouf, L. Baron, X. Wang, "Existence d'une infinité non dénombrable de positions isotropes pour les manipulateurs 5R sphériques", Conférence iftomm2007.
- [2] D. Chablat, J. Angeles, "The Computation of all 4R Serial Spherical Wrists With an Isotropic Architecture", Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME, v 125, n 2, June, 2003, p 275-280.
- [3] J. Angeles, "The Design of Isotropic Manipulator Architectures in the Presence of Redundancies", The International Journal of Robotics Research, Volume 11, No. 3, June 1992. p 197-201.
- [4] L. Baron, J. Angeles, "The isotropic decoupling of the direct kinematics of parallel manipulators under sensor redundancy", Robotics and Automation, 1995. Proceedings., 1995 IEEE International Conference on Volume 2, 21-27 May 1995, p 1541-1546
- [5] L. Baron, J. Angeles, "The Direct Kinematics of Parallel Manipulators Under Joint-Sensor Redundancy", IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol.16, No.1, February 2000, p 12-19.
- [6] Ranjbaran Farzam, "A methodology for the kinematic design and performance evaluation of serial manipulators" Ph.D., McGill University (Canada), 1997, 249 pages.

[7] J. Angeles, "Fundamentals of Robotic Mechanical Systems : Theory, methods, and algorithms", Second Edition, Springer-Verlag, 2003.