

PRÉSENCE DE SINGULARITÉS DANS UN ESPACE DE TRAVAIL DÉTERMINÉ

IRINA CONSTANTINESCU ET CLÉMENT M. GOSSELIN

Département de Génie Mécanique

Pavillon Pouliot

Université Laval

Québec, QC, Canada, G1K 7P4

irina@gmc.ulaval.ca, gosselin@gmc.ulaval.ca

Résumé

Cet article propose un algorithme qui vérifie la présence de singularités dans une hyper-boîte de l'espace de travail d'un manipulateur parallèle. L'algorithme proposé utilise la méthode des extrémums [3] avec des substitutions additionnelles. Cette méthode est une application détaillée d'une idée générale proposée par Merlet [3]. Une deuxième procédure a été développée pour obtenir la forme des surfaces (ou des courbes) de singularité et afin de vérifier l'algorithme. La méthode a été appliquée sur un robot parallèle plan à 3 ddl avec des actionneurs prismatiques.

1 Introduction

Les robots parallèles sont utilisés de plus en plus dans différents domaines. Contrairement aux robots sériels, ils sont caractérisés par leur excellente rigidité structurelle et leur précision de positionnement. Pendant leur utilisation, il est très important d'éviter les singularités, puisque la rigidité du système disparaît localement et le système devient incontrôlable. Dans cet article, on étudie seulement la présence de singularités de type II, qui peuvent se produire à l'intérieur de l'espace atteignable. Ce sont des configurations où, même si les actionneurs sont bloqués, l'effecteur peut subir un mouvement infinitésimal. Cet article propose un algorithme, basé sur la méthode de Merlet [3], qui vérifie l'existence de singularités dans une hyper-boîte (un parallélépipède de dimen-

sion maximale) de l'espace de travail. La procédure est appliquée sur un manipulateur parallèle plan à 3 ddl.

2 Expression analytique des lieux de singularité

Pour un manipulateur parallèle plan à trois degrés de liberté, l'équation du déterminant de la matrice jacobienne est d'ordre II (voir [1]) et pour une orientation constante, la courbe de singularité est représentée par une parabole, une hyperbole ou une ellipse. Un manipulateur parallèle plan à 3 ddl avec actionneurs prismatiques est présenté à la figure 1. Il possède une plate-forme mobile, $P_1P_2P_3$, et une base fixe, $B_1B_2B_3$. Les actionneurs linéaires de longueurs variables ρ_i lient les points P_i et B_i , où $i = 1, 2, 3$. Les pattes sont attachés à la base et à la plate-forme avec des articulations rotoïdes. Pour obtenir les matrices jacobienes, on résoud le problème géométrique inverse, c'est-à-dire on exprime les longueurs des trois vérins ρ_1, ρ_2, ρ_3 (les variables articulaires), en fonction des coordonnées cartésiennes de l'effecteur dans l'espace x, y et ϕ . On définit un repère fixe lié à la base, OXY , et un repère mobile, $O'X'Y'$, lié à la plate-forme. Les coordonnées des points B_i dans le repère fixe sont (B_{ix}, B_{iy}) et les coordonnées des points P_i , dans le repère mobile sont données par (P'_{ix}, P'_{iy}) . Les vecteurs \mathbf{p}'_i et \mathbf{b}_i sont définis comme $\mathbf{p}'_i = [P'_{ix} \ P'_{iy}]^T$ et $\mathbf{b}_i = [B_{ix} \ B_{iy}]^T$. On définit le vecteur de translation $\mathbf{t} = [x \ y]^T$ et la matrice de rotation \mathbf{Q} comme :

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix},$$

qui transforment le repère mobile $O'X'Y'$ au repère fixe OXY . Pour trouver les matrices jacobienes, on écrit des relations vectorielles pour chaque patte i du manipulateur en utilisant la notation donnée à la figure 2.

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{p}_i - \mathbf{b}_i, \quad i = 1, 2, 3$$

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{t} - \mathbf{Q}\mathbf{p}'_i, \quad i = 1, 2, 3$$

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{t} - \mathbf{Q}\mathbf{p}'_i - \mathbf{b}_i, \quad i = 1, 2, 3$$

La longueur des vérins est notée par ρ_i , soit :

$$\rho_i^2 = \mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_i = (\mathbf{t} - \mathbf{Q}\mathbf{p}'_i - \mathbf{b}_i)^T (\mathbf{t} - \mathbf{Q}\mathbf{p}'_i - \mathbf{b}_i), \quad i = 1, 2, 3 \quad (1)$$

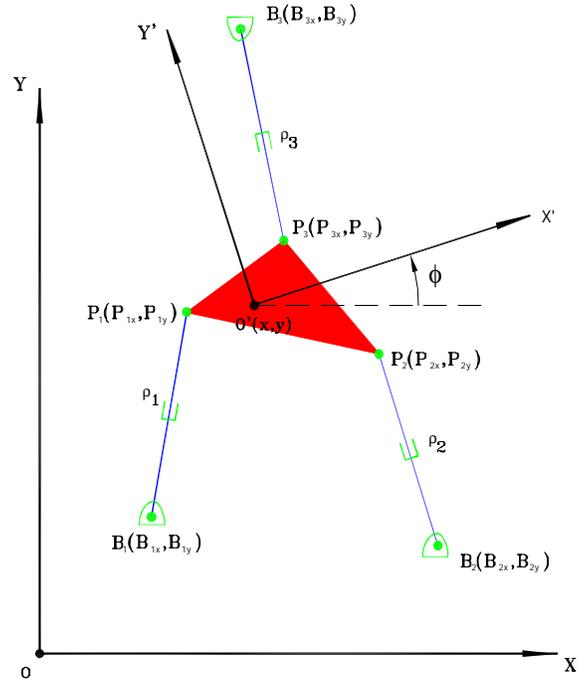


FIG. 1 – Manipulateur parallèle plan à 3 ddl.

En dérivant l'équation (1), on obtient l'expression suivante :

$$2\dot{\rho}_i\rho_i = 2(\mathbf{t} - \mathbf{Q}\mathbf{p}'_i - \mathbf{b}_i)^T \dot{\mathbf{t}} + 2(\mathbf{t} - \mathbf{Q}\mathbf{p}'_i - \mathbf{b}_i)^T \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{p}'_i \quad (2)$$

où

$$\dot{\mathbf{Q}} = \dot{\phi}\mathbf{E}\mathbf{Q} \quad \text{et} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

L'équation (2) peut être écrite :

$$\dot{\rho}_i\rho_i = \mathbf{u}_i^T \dot{\mathbf{t}} + \mathbf{u}_i^T \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{p}'_i = \mathbf{u}_i^T \dot{\mathbf{t}} + \dot{\phi}\mathbf{u}_i^T \mathbf{E}\mathbf{Q}\mathbf{p}'_i \quad (3)$$

et finalement on obtient :

$$\mathbf{J}\mathbf{s} = \mathbf{K}\dot{\boldsymbol{\rho}}$$

où

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} & \dot{x} & \dot{y} \end{bmatrix}^T, \quad \dot{\boldsymbol{\rho}} = \begin{bmatrix} \dot{\rho}_1 & \dot{\rho}_2 & \dot{\rho}_3 \end{bmatrix}^T$$

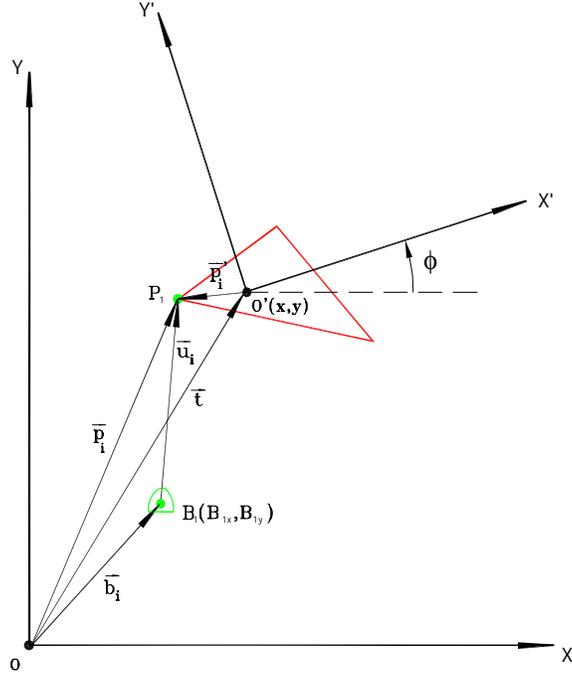


FIG. 2 – Manipulateur parallèle plan à 3 ddl - notation vectorielle.

et

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T \mathbf{E} \mathbf{Q} \mathbf{P}'_1 & \mathbf{u}_1^T \\ \mathbf{u}_2^T \mathbf{E} \mathbf{Q} \mathbf{P}'_2 & \mathbf{u}_2^T \\ \mathbf{u}_3^T \mathbf{E} \mathbf{Q} \mathbf{P}'_3 & \mathbf{u}_3^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_3 \end{bmatrix}$$

Pour trouver les configurations singulières de type II, on doit calculer les racines du déterminant de la matrice jacobienne \mathbf{J} . Donc, l'expression analytique pour les lieux de singularité est :

$$f(x, y, \phi) = E_1 x^2 + E_2 y^2 + E_3 xy + E_4 x + E_5 y + E_6 = 0, \quad (4)$$

où les coefficients E_i , $i = 1, \dots, 6$, sont fonctions de la géométrie du manipulateur (les coefficients N_j , $j = 1, \dots, 25$) et de l'orientation de la plate-forme (angle ϕ), tel que présenté dans [2].

$$E_1 = N_1 \cos(\phi) + N_2 \sin(\phi)$$

$$E_2 = N_3 \cos(\phi) + N_4 \sin(\phi)$$

$$E_3 = N_5 \cos(\phi) + N_6 \sin(\phi)$$

$$E_4 = N_7 \cos^2(\phi) + N_8 \sin^2(\phi) + N_9 \sin(\phi) \cos(\phi) + N_{10} \cos(\phi) + N_{11} \sin(\phi)$$

$$E_5 = N_{12} \cos^2(\phi) + N_{13} \sin^2(\phi) + N_{14} \sin(\phi) \cos(\phi) + N_{15} \cos(\phi) + N_{16} \sin(\phi)$$

$$E_6 = N_{17} \cos^3(\phi) + N_{18} \sin^3(\phi) + N_{19} \sin(\phi) \cos^2(\phi) + N_{20} \sin^2(\phi) \cos(\phi) + N_{21} \cos^2(\phi) + N_{22} \sin^2(\phi) + N_{23} \sin(\phi) \cos(\phi) + N_{24} \cos(\phi) + N_{25} \sin(\phi)$$

L'expression des coefficients N_j est disponible auprès des auteurs ou dans [2]. Pour une orientation constante, on obtient une équation quadratique. En fonction du discriminant $\Delta = 4E_1E_2 - E_3^2$, on a les trois cas suivants :

$\Delta > 0$, la courbe est une ellipse,

$\Delta = 0$, la courbe est une parabole,

$\Delta < 0$, la courbe est une hyperbole.

3 Extrémums et signe du déterminant de la jacobienne

Pour vérifier si une fonction continue f (le déterminant de la matrice jacobienne \mathbf{J}) peut-être égale à zéro, il suffit d'établir si elle change de signe. Par conséquent, la vérification du signe des extrémums de f est une condition suffisante. Si une fonction, f , est définie pour toutes les valeurs de ses variables u_i , $i = 1, \dots, n$, les extrémums sont les minimums et les maximums locaux, donnés par les équations :

$$\frac{\partial f}{\partial u_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Cependant, en présence de bornes sur les variables, il est possible que les valeurs extrêmes de la fonction s'obtiennent pour une valeur limite d'(au moins) une des variables. Donc, il est désirable de trouver une substitution qui exprime f en fonction de variables non bornées. Dans notre cas, le déterminant est une fonction de variables limitées x , y et ϕ . On définit alors des nouvelles variables en deux étapes :

1. On exprime $\sin(\phi)$ et $\cos(\phi)$ en fonction de $\tan(\frac{\phi}{2})$:

$$\sin(\phi) = \frac{2T}{(1+T^2)} \quad \text{et} \quad \cos(\phi) = \frac{1-T^2}{(1+T^2)}, \quad \text{où} \quad T = \tan\left(\frac{\phi}{2}\right).$$

À ce moment ci, les variables x , y et ϕ , sont devenues x , y et T .

2. On définit trois autres variables α , β et γ (voir [3]) tel que :

$$\begin{aligned} x &= x_{min} + \frac{(1 + \sin(\alpha))}{2}(x_{max} - x_{min}) \\ y &= y_{min} + \frac{(1 + \sin(\beta))}{2}(y_{max} - y_{min}) \\ T &= T_{min} + \frac{(1 + \sin(\gamma))}{2}(T_{max} - T_{min}), \end{aligned}$$

où x_{min} , x_{max} , y_{min} , y_{max} , T_{min} et T_{max} sont les limites de la boîte représentant l'espace de travail. Pour simplifier l'expression analytique, on effectue une nouvelle substitution en fonction des limites de l'espace de travail :

$$\begin{aligned} x &= x_M + \sin(\alpha)x_m \\ y &= y_M + \sin(\beta)y_m \\ T &= T_M + \sin(\gamma)T_m \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} x_m &= \frac{x_{max} - x_{min}}{2} \quad \text{et} \quad x_M = \frac{x_{max} + x_{min}}{2} \\ y_m &= \frac{y_{max} - y_{min}}{2} \quad \text{et} \quad y_M = \frac{y_{max} + y_{min}}{2} \\ T_m &= \frac{T_{max} - T_{min}}{2} \quad \text{et} \quad T_M = \frac{T_{max} + T_{min}}{2}. \end{aligned}$$

Quoique les nouvelles variables sont α , β et γ , en pratique on travaille seulement avec $\sin(\alpha)$, $\sin(\beta)$ et $\sin(\gamma)$. Ces substitutions ont les avantages suivants :

- avec les variables α , β , γ , l'espace de travail est sans limites ;
- les nouvelles variables (les sinus de α , β et γ) ont des valeurs comprises dans l'intervalle $[-1, 1]$.

Pour savoir s'il y a la présence de singularité dans l'espace de travail limité par x_{min} , x_{max} , y_{min} , y_{max} , T_{min} , T_{max} , on dérive l'équation (4) des lieux des singularité, par rapport aux α , β et γ , c'est-à-dire on va chercher les extrémums de la fonction f selon les trois variables α , β et γ , soit :

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{\partial f}{\partial \beta} = \frac{\partial f}{\partial \gamma} = 0. \quad (5)$$

En dérivant par rapport aux deux premières nouvelles variables (α et β), on obtient deux équations linéaires en $\sin(\alpha)$ et $\sin(\beta)$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \alpha} &= (A_1 \sin(\alpha) + A_2 \sin(\beta) + A_3) \cos(\alpha) = F_1(\alpha, \beta, \gamma, \mathbf{g}, \mathbf{l}) \cos(\alpha) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \beta} &= (B_1 \sin(\alpha) + B_2 \sin(\beta) + B_3) \cos(\beta) = F_2(\alpha, \beta, \gamma, \mathbf{g}, \mathbf{l}) \cos(\beta) = 0,\end{aligned}\tag{6}$$

où A_i et B_i , avec $i = 1, 2, 3$, sont des coefficients qui dépendent de la géométrie du robot (caractérisée par le vecteur $\mathbf{g} = [b_{1x}, b_{1y}, b_{2x}, b_{2y}, b_{3x}, b_{3y}, p'_{1x}, p'_{1y}, p'_{2x}, p'_{2y}, p'_{3x}, p'_{3y}]$), des limites de l'espace de travail (caractérisées par le vecteur $\mathbf{l} = [x_{min}, x_{max}, y_{min}, y_{max}, T_{min}, T_{max}]$) et de la troisième variable γ . On considère les deux équations comme un système linéaire avec deux inconnues, $\sin(\alpha)$ et $\sin(\beta)$. La solution est :

$$\begin{aligned}\sin(\alpha) &= \frac{2E_2E_4 - E_5E_3 - E_3^2x_M + 4x_ME_1E_2}{x_m(E_3^2 - 4E_1E_2)} \\ \sin(\beta) &= \frac{2E_1E_5 - E_4E_3 - E_3^2y_M + 4y_ME_1E_2}{y_m(E_3^2 - 4E_1E_2)}.\end{aligned}\tag{7}$$

Le dénominateur sera nul lorsque la courbe de singularité, pour une orientation constante, est une parabole ($\Delta = E_3^2 - 4E_1E_2 = 0$). Ce cas est considéré séparément par l'algorithme. La solution du système est substituée dans la troisième équation de (5), $\frac{\partial f}{\partial \gamma} = 0$. On obtient un polynôme de degré 13 en $\sin(\gamma)$:

$$\frac{\partial f}{\partial \gamma} = (C_1 \sin^{13}(\gamma) + C_2 \sin^{12}(\gamma) + \dots + C_{14}) \cos(\gamma),\tag{8}$$

où C_i avec $i = 1, \dots, 14$, sont des coefficients dépendants de la géométrie du robot et des limites de l'espace de travail, donc :

$$\frac{\partial f}{\partial \gamma} = F_3(\sin(\gamma), \mathbf{g}, \mathbf{l}) \cos(\gamma) = 0,$$

Les solutions du polynôme de degré 13, doivent être réelles et dans l'intervalle $[-1, 1]$. Aux solutions obtenues on ajoute les valeurs $\{-1, 1\}$ de l'équation $\cos(\gamma) = \pm\sqrt{1 - \sin^2(\gamma)} = 0$. Ensuite, on substitue dans (7) et on ajoute les solutions $\{-1, 1\}$ qui résultent des équations $\cos(\alpha) = 0$ et $\cos(\beta) = 0$ provenant de (6). Finalement, pour calculer le signe de la fonction, on prend toutes les valeurs obtenues pour $\sin(\alpha)$, $\sin(\beta)$ et $\sin(\gamma)$ et on les substitue dans la fonction initiale (c'est la fonction obtenue de l'équation (4) et qui est dépendante de α , β et γ après avoir fait les trois substitutions). Si les signes de la fonction sont différents, une singularité existe dans notre espace de travail.

4 Algorithme et vérification

Pour vérifier l'existence de singularités dans un espace de travail limité qui est défini comme un parallélépipède, on vérifie d'abord l'intérieur de la boîte, ensuite les faces et à la fin, les arrêtes. Le programme s'interrompt dès qu'une singularité est détectée. En utilisant le même principe, un algorithme a été développé pour la visualisation de la surface des singularités. L'hyper-boîte a été divisée en plusieurs (n^3) petites boîtes, c'est-à-dire on a discrétisé l'espace de travail. Si on trouve une singularité dans une des petites boîtes, on l'ajoute à l'image discretisée de la surface de singularités (voir figure 4 et figure 9). La comparaison avec le graphique de la surface, obtenue par d'autres méthodes, nous permet de vérifier l'algorithme proposé.

5 Exemples pour vérification de l'algorithme

Dans cette section on présente deux exemples de manipulateurs plans :

- un manipulateur simplifié qui est illustré à la figure 3
- un manipulateur général qui est illustré à la figure 1.

5.1 Manipulateur parallèle plan simplifié

Les paramètres géométriques pour le manipulateur plan simplifié sont donnés dans le tableau 1.

i	B_{ix}	B_{iy}	P'_{ix}	P'_{iy}
1	0	0	0	0
2	15.91	0	17.04	0
3	0	10	13.2364	16.097

TAB. 1 – Paramètres géométriques du manipulateur simplifié.

Pour un espace de travail limité par $x_{min} = -20$, $x_{max} = 20$, $y_{min} = -20$, $y_{max} = 20$, $\phi_{min} = 0$, $\phi_{max} = \frac{\pi}{4}$ et où $T_{min} = \tan(\frac{\phi_{min}}{2})$, $T_{max} = \tan(\frac{\phi_{max}}{2})$, la surface de singularité est représentée à la figure 5.

La figure 4 présente les surfaces de singularité obtenues pour différents niveaux de discrétisation.

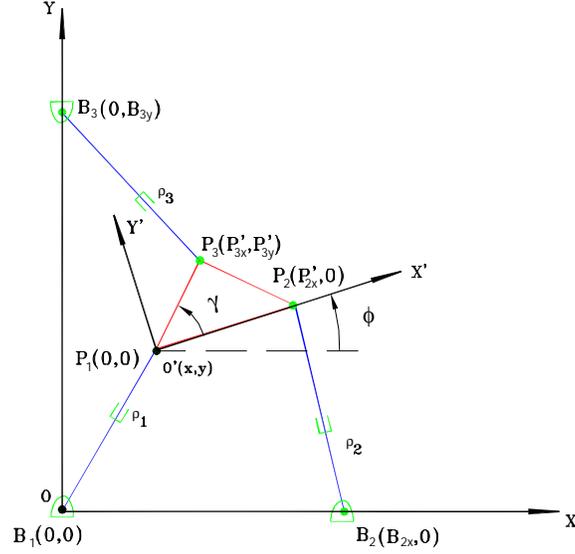


FIG. 3 – Manipulateur parallèle plan simplifié.

On peut voir que quand le réseau de discrétisation devient de plus en plus fin, l'image obtenue s'approche du graphique réel, obtenu en utilisant la fonction *implicitplot3d* du logiciel *Maple*, figure 5. On peut également utiliser le même algorithme pour vérifier une section de l'espace de travail. Par exemple, pour une orientation constante, on examine les extrémums dans un rectangle. Pour une orientation $\phi = \phi_{max}$, la courbe de singularité est représentée à la figure 6. Les résultats avec différents pas de discrétisation 2D sont donnés à la figure 7.

5.2 Manipulateur parallèle plan général

Les paramètres géométriques pour le manipulateur plan général sont donnés dans le tableau 2. Pour un espace de travail limité par $x_{min} = -50$, $x_{max} = 50$, $y_{min} = -50$, $y_{max} = 50$, $\phi_{min} = 0$, $\phi_{max} = \frac{\pi}{4}$ et où $T_{min} = \tan(\frac{\phi_{min}}{2})$, $T_{max} = \tan(\frac{\phi_{max}}{2})$, la surface de singularité est représentée à la figure 8. On présente aussi le réseau de discrétisation 3D pour le manipulateur parallèle plan général, pour des pas différents, figure 9. Pour une orientation $\phi = \phi_{max}$, la courbe de singularité est représentée à la figure 10; le réseau 2D est donné à la figure 11.

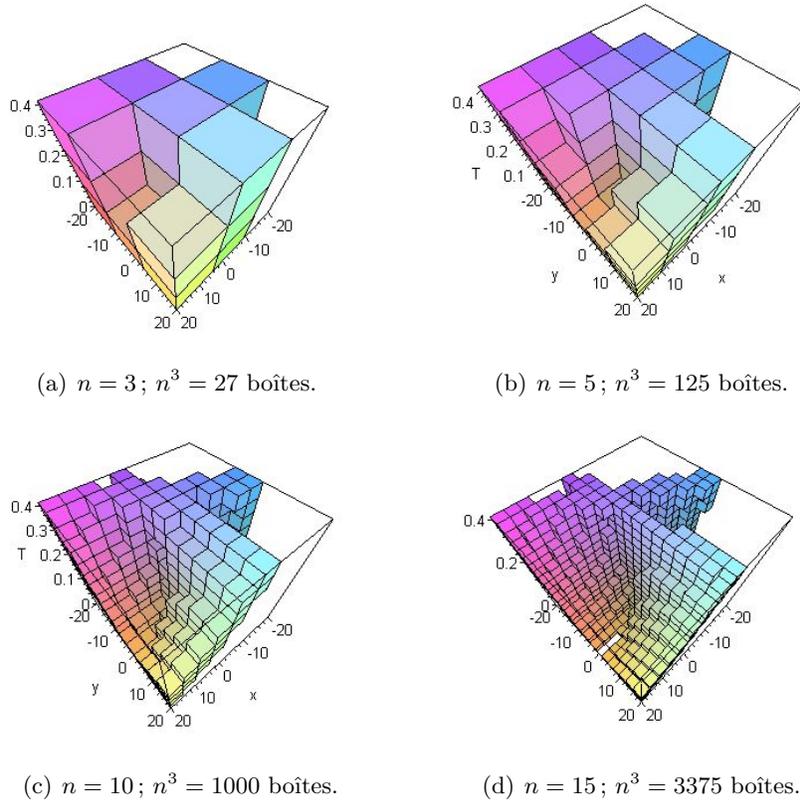


FIG. 4 – Manipulateur simplifié - discrétisation 3D.

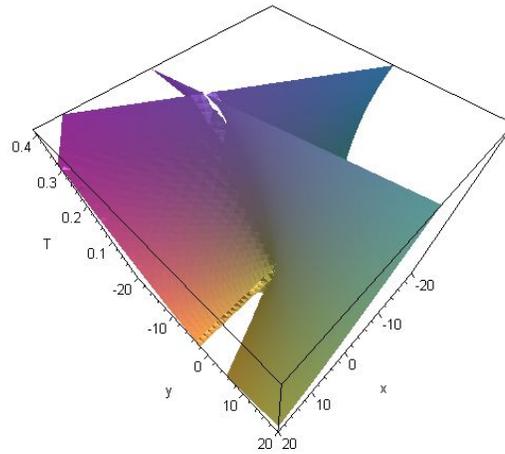


FIG. 5 – Surface de singularité pour le manipulateur parallèle simplifié.

6 Conclusion

Un algorithme de détection de singularités dans un parallélépipède donné dans l'espace de travail d'un robot parallèle a été présenté. L'algorithme proposé a été appliqué à un manipulateur

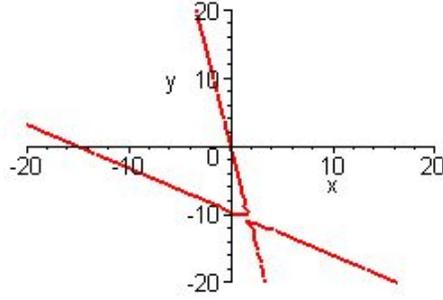
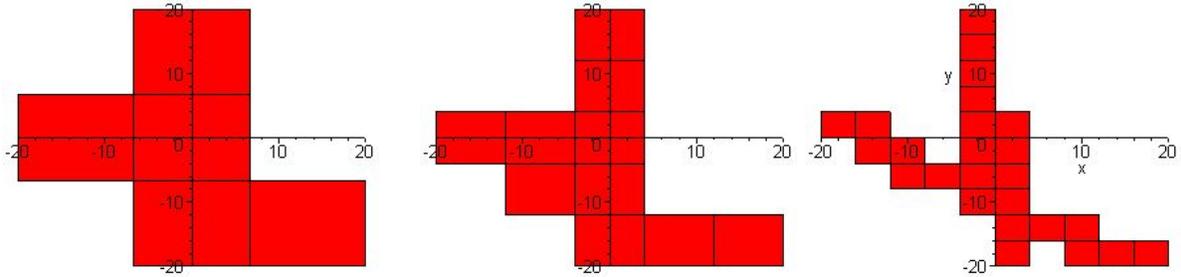


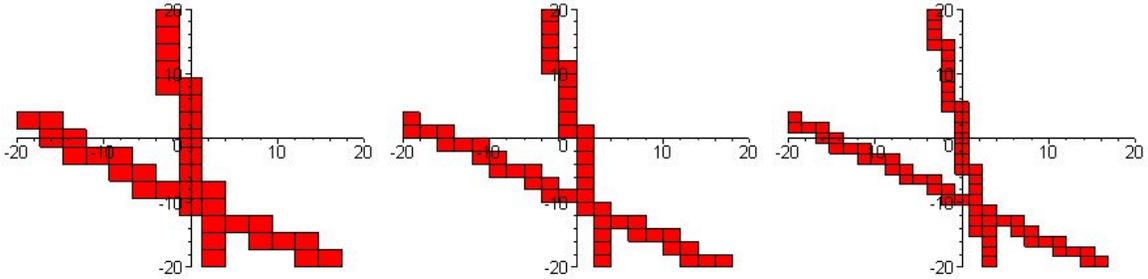
FIG. 6 – Courbe de singularité pour le manipulateur parallèle plan simplifié, $\phi = \phi_{max}$.



(a) $n = 3$; $n^2 = 9$ rectangles.

(b) $n = 5$; $n^2 = 25$ rectangles.

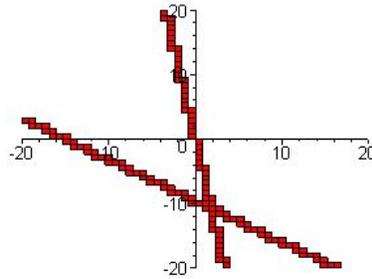
(c) $n = 10$; $n^2 = 100$ rectangles.



(d) $n = 15$; $n^2 = 225$ rectangles.

(e) $n = 20$; $n^2 = 400$ rectangles.

(f) $n = 25$; $n^2 = 625$ rectangles.



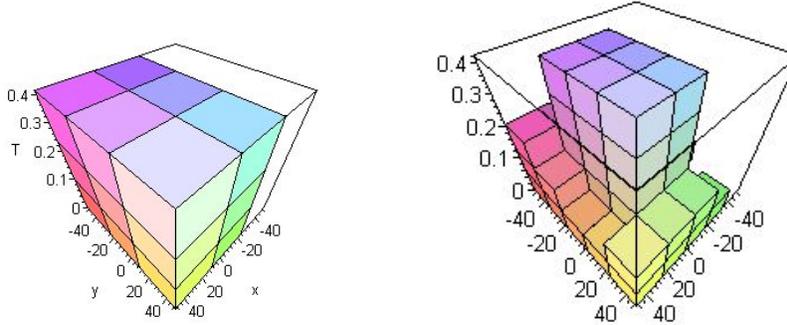
(g) $n = 50$; $n^2 = 2500$ rectangles.

FIG. 7 – Manipulateur simplifié - discrétisation 2D pour $\phi = \phi_{max}$.

parallèle plan. La procédure vérifie avec succès et d'une façon rapide l'existence de singularités dans n'importe quelle boîte définie dans l'espace de travail. Présentement, on tente d'appliquer

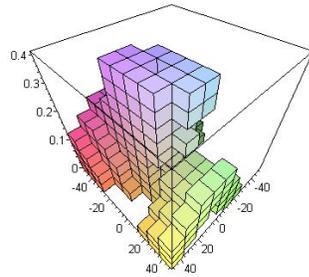
i	B_{ix}	B_{iy}	P'_{ix}	P'_{iy}
1	3.78	4.34	-4.83	-3.19
2	34.47	-3.78	12.04	-3.19
3	16.233	34.76	8.23	12.09

TAB. 2 – Paramètres géométriques du manipulateur général.

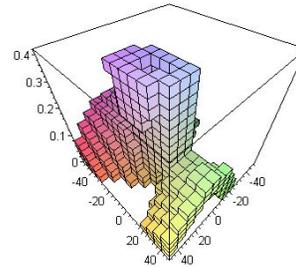


(a) $n = 3$; $n^3 = 27$ boîtes.

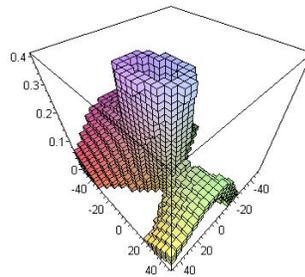
(b) $n = 5$; $n^3 = 125$ boîtes.



(c) $n = 10$; $n^3 = 1000$ boîtes.



(d) $n = 15$; $n^3 = 3375$ boîtes.



(e) $n = 25$; $n^3 = 15625$ boîtes.

FIG. 8 – Manipulateur général - discrétisation 3D.

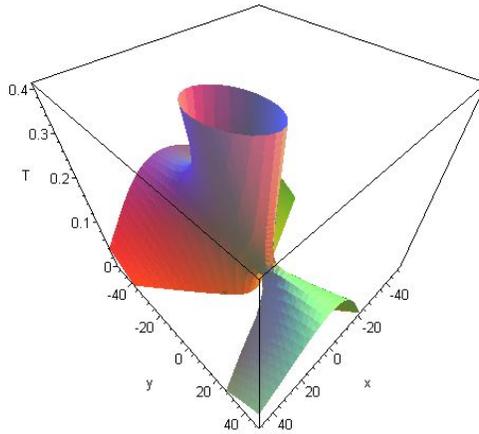


FIG. 9 – Surface de singularités pour le manipulateur parallèle général.

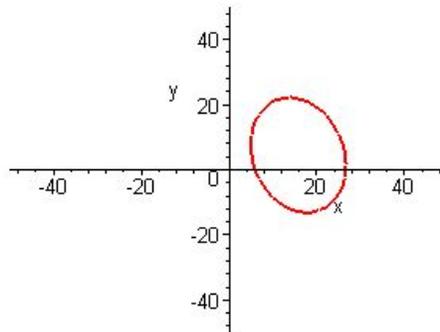


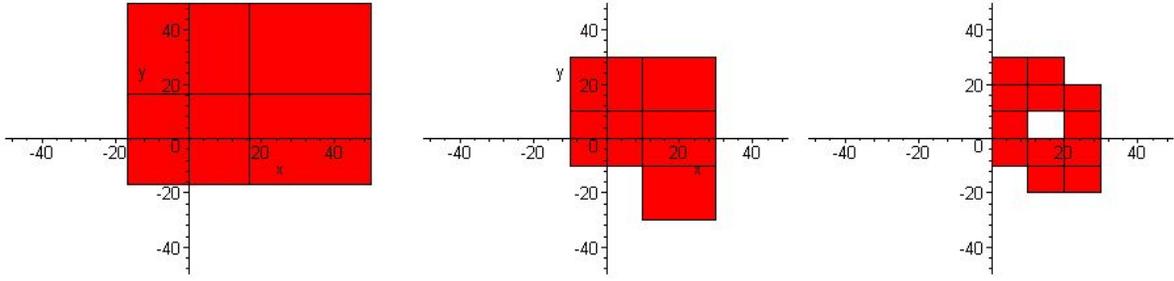
FIG. 10 – Courbe de singularité pour le manipulateur parallèle plan général, $\phi = \phi_{max}$.

cette méthode pour l'analyse de manipulateurs parallèles spatiaux.

Remerciements: Les auteurs remercient M. Mayer-St-Onge et Dr. Zlatanov pour leur aide dans la préparation du manuscrit.

Références

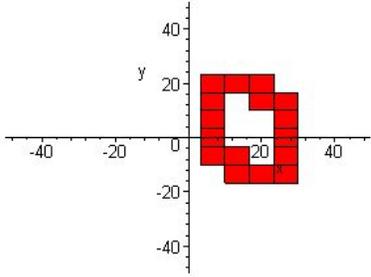
- [1] Sefrioui, J. et Gosselin, C.M., (1994), 'On the quadratic nature of the singularity curves of planar three-degree-of-freedom parallel manipulators', *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 30, No. 4, pp. 533–551.
- [2] Mayer-St-Onge, B. et Gosselin, C.M., (1997), 'Problème géométrique direct et lieux de singula-



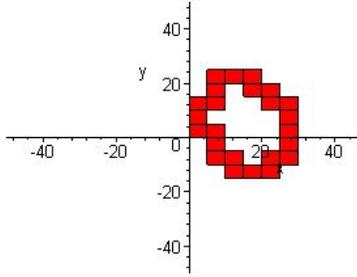
(a) $n = 3$; $n^2 = 9$ rectangles.

(b) $n = 5$; $n^2 = 25$ rectangles.

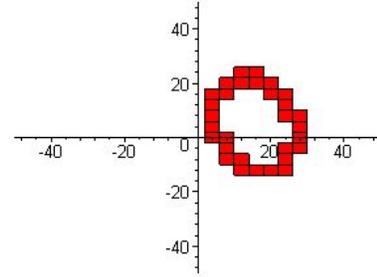
(c) $n = 10$; $n^2 = 100$ rectangles.



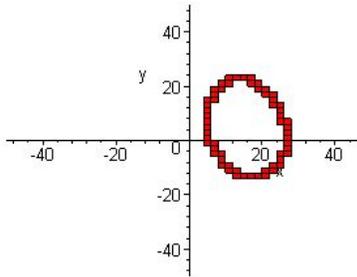
(d) $n = 15$; $n^2 = 225$ rectangles.



(e) $n = 20$; $n^2 = 400$ rectangles.



(f) $n = 25$; $n^2 = 625$ rectangles.



(g) $n = 50$; $n^2 = 2500$ rectangles.

FIG. 11 – Manipulateur général - discrétisation 2D pour $\phi = \phi_{max}$.

rité des manipulateurs parallèles plans à trois degrés de liberté', Rapport de recherche, Université Laval.

[3] Merlet J-P., (1997) 'Estimation efficace des caractéristiques de robots parallèles : Extrémums des raideurs et des coordonnées, vitesses, forces articulaires et Singularités dans un espace de travail en translation', Rapport de recherche, # 3243, INRIA.